Programme de Colles n°16

semaine du 10/02 au 14/02

La note globale prend en compte la **connaissance du cours**, la **résolution des exercices** et la **présentation orale**. Sauf exception, une question de cours, parmi celles figurant dans ce programme, sera systématiquement demandée.

Thèmes de la colle

▷ Endomorphismes des espaces euclidiens

- Symétries orthogonales, réflexions, isométries vectorielles, caractérisation par le produit scalaire, l'adjoint, l'image d'une base orthonormée et la matrice dans une base orthonormée, groupe orthogonal et spécial orthogonal, description des isométries vectorielles en dimension 2 (isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathcal{SO}(\mathsf{E})$ lorsque $\dim \mathsf{E} = 2$ et conséquences), angle orienté de deux vecteurs non nuls, réduction des isométries vectorielles en base orthonormée, isométrie vectorielle positive en dimension 3.

▷ Variables aléatoires discrètes

- Généralités : système complet d'événements associé à une v.a.d, loi d'une v.a.d, lois usuelles (certaine, uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson), approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, opérations sur les v.a.d.
- Couples de v.a.d : loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle sachant un événement, indépendance de deux v.a.d, indépendance mutuelle d'une suite finie ou infinie de v.a.d, lemme des coalitions.
- Espérance d'une v.a.d : définition (cas $\mathsf{X} \geqslant 0$ ou $\mathsf{X} \in \mathrm{L}^1$), espérance des lois usuelles, formule de l'anti-répartition, formule de transfert, propriétés de l'espérance (inégalité triangulaire,linéarité, positivité, croissance), espérance d'un produit de v.a.d indépendantes.

▷ Variables aléatoires discrètes (cours uniquement)

- Variance : définition ($\mathsf{X}(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\mathsf{X} \in \mathrm{L}^2$), formule de Koenig-Huyguens, variance des lois usuelles, v.a.d centré réduite.
- Covariance : définition, formule de Koenig-Huyguens, propriétés (bilinéarité, symétrie), variables décorrélées et conséquences sur la variance d'une somme.
- Inégalité de condensation et théorème limite : inégalités de Markov et Bienaymé-Chebychev, loi faible des grands nombres.
- Fonction génératrice : définition ($\mathsf{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$), expression à l'aide d'une série entière, continuité sur $[-1, 1]$, la fonction génératrice caractérise la loi, utilisation pour l'espérance et la variance, fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes.

Questions de cours

- Espérance d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson : énoncé et démonstration (uniquement pour la loi géométrique).
- Variance d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson : énoncé et démonstration (uniquement pour la loi de Poisson).
- Inégalité de Markov et Bienaymé-Chebychev : énoncé et démonstration.
- Propriétés de la fonction génératrice : énoncé et démonstration.