Rappels d'intégration

I. Définition/Sommes de Riemann

Fonction continue par morceaux

▶ Soit $[a, b]$ un segment, on dit que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a, b]$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \text{ f est continue sur }]a_k, a_{k+1}[\text{ et admet des limites finies en } a_k^+ \text{ et } a_{k+1}^-.$$

On note $\mathscr{CM}([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.
▶ Soit I un intervalle, on dit que f est **continue par morceaux** sur I lorsque f est continue par morceaux sur tout segment $[a, b] \subset I$.
On note $\mathscr{CM}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment

▶ a été définie lorsque f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

▶ Si f est à valeur dans $\mathbb{C}$ avec $f = u + iv$ où $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Sommes de Riemann

▶ On note $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

▶ Si (H) $\|$ f est continue sur $[a, b]$; alors : (C) $\|$ $S_n(f), R_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

▶ Notamment, si $f \in \mathscr{C}([0, 1])$ alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt.$$

II. Propriétés

Propriétés générales

Soient $f, g \in \mathscr{CM}(I)$ et $a, b, c \in I$ avec $a \leqslant b$.

▶ **Linéarité** : $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\ dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda\int_a^b g(t)\,dt.$

▶ **Relation de Chasles** : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$

▶ **Inégalité triangulaire intégrale** : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$

Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Si de plus f est à valeurs réelles.

▶ **Positivité** : si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0.$

▶ Si (H) || • f est continue sur $[a,b]$; alors : (C) || f est nulle sur $[a,b]$.
• f est de signe constant
• $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$

Intégration par parties

Si (H) || u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$; alors :

$$\text{(C)} \quad \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$$

Changement de variable

Si (H) || ▶ f est continue sur $[a,b]$; alors : (C) || $\displaystyle\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.
▶ $\varphi \in \mathscr{C}^1([\alpha,\beta])$, $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$

▶ Conséquences :
- Si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
- Si f est impaire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.
- Si f est T-périodique : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$.

III. Théorème fondamental de l'analyse et formules de Taylor

Primitive

▶ Si (H) || • I est un intervalle, $a \in I$; alors :
• f est continue sur I

(C) || $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

▶ Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle et deux primitives diffèrent d'une constante.

▶ Si F est un primitive de f sur I et $a, b \in I$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

▶ Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

Formules de Taylor

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$.

▶ **Taylor-Young**. Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$ alors: $\displaystyle f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$.

▶ **Taylor intégrale**. Si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ alors : $\displaystyle f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

▶ **Inégalité de Taylor-Lagrange**. Si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ et il existe M tel que $|f^{(n+1)}| \leqslant M$ alors :

$$\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k \right| \leqslant M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$